

MODELO MATEMÁTICO MULTIVARIABLE PARA ESTIMAR LA CAPACIDAD SOSTENIBLE DE ENDEUDAMIENTO EN HOGARES URBANOS BAJO INESTABILIDAD MACROECONÓMICA

A Multivariable Mathematical Model to Estimate Sustainable Household Debt Capacity under Macroeconomic Instability

Maribel Duque López¹

¹Departamento de Ciencias Básicas, Corporación Universitaria del Meta - UNIMETA, Villavicencio, Colombia. maribel.duque@unimeta.edu.co

RESUMEN

Este artículo desarrolla un modelo matemático de optimización multivariable para estimar la capacidad sostenible de endeudamiento en hogares urbanos sujetos a inestabilidad macroeconómica. El enfoque adoptado se fundamenta en amortización discreta, inflación compuesta, choques negativos de ingreso y restricciones de liquidez, integrados en un marco de optimización convexa. Cada ecuación es justificada matemáticamente y vinculada con literatura financiera contemporánea. Se incluye un estado del arte que contextualiza el modelo frente a investigaciones previas sobre riesgo crediticio minorista, vulnerabilidad del ingreso y regulación prudencial. Un caso representativo del contexto colombiano 2022-2025 y un análisis de sensibilidad muestran discrepancias significativas entre la capacidad aprobada por criterios bancarios tradicionales y la capacidad realmente sostenible. El modelo constituye una herramienta rigurosa para educación financiera, formulación de política crediticia y análisis microeconómico aplicado.

Palabras clave: optimización convexa, matemáticas financieras, riesgo crediticio, inflación, vulnerabilidad del hogar, Basilea.

ABSTRACT

This article develops a multivariable mathematical optimization model to estimate sustainable debt capacity in urban households exposed to macroeconomic instability. The approach is grounded in discrete amortization, compound inflation, negative income shocks and liquidity constraints, integrated within a convex optimization framework. Each equation is mathematically justified and linked to contemporary financial literature. A state of the art situates the model with respect to previous research on retail credit risk, income vulnerability and prudential regulation. A representative case from the Colombian context 2022-2025, together with a sensitivity analysis, reveals significant discrepancies between the capacity approved under traditional banking criteria and the capacity that is actually sustainable. The model provides a rigorous tool for financial education, credit policy design and applied microeconomic analysis.

Keywords: convex optimization, financial mathematics, credit risk, inflation, household vulnerability, Basel.



Fotografía: por definir

1. INTRODUCCIÓN

Las decisiones de endeudamiento de los hogares dependen de elementos complejos como la volatilidad laboral, la inflación persistente, las tasas elevadas de interés y la rigidez del gasto esencial. En Colombia, las entidades financieras aplican reglas simplificadas como la razón cuota/ingreso (DTI, por sus siglas en inglés) que reducen un fenómeno dinámico y multidimensional a una relación lineal y estática.

La literatura reciente en finanzas del hogar (Bogaert et al., 2023), regulación prudencial (Basel Committee on Banking Supervision, 2019) y optimización matemática (Luenberger, 1998; Ye & Luenberger, 2016) demuestra que la solvencia real es afectada por interacciones no lineales, entre ellas la convexidad de la cuota respecto al monto del crédito, el deterioro del ingreso real causado por la inflación compuesta y la sensibilidad ante choques negativos de ingreso.

En este contexto, se propone un modelo de optimización convexa que integra estos elementos y permite estimar una capacidad sostenible de endeudamiento más realista que la obtenida mediante los criterios utilizados por la banca comercial. El aporte principal consiste en combinar formalmente ecuaciones de amortización discreta, inflación compuesta, choques proporcionales de ingreso y restricciones de liquidez

en un único marco matemático aplicado al hogar urbano colombiano.

2. ESTADO DEL ARTE Y TRABAJOS RELACIONADOS

La estimación de la capacidad de endeudamiento en hogares ha sido abordada desde diversos enfoques teóricos y empíricos. La literatura especializada identifica cinco líneas principales de desarrollo: modelos de amortización y matemáticas financieras tradicionales, estudios sobre vulnerabilidad del ingreso y sobreendeudamiento, regulación prudencial del riesgo crediticio, optimización matemática aplicada a decisiones financieras domésticas y modelos intertemporales bajo inflación y volatilidad macroeconómica.

2.1 Matemáticas financieras y modelos de amortización

Los fundamentos de la ecuación de amortización discreta se encuentran en la teoría de anualidades presentada por Luenberger (1998), donde se demuestra que el valor presente de una serie de pagos constantes requiere un tratamiento geométrico que garantiza equivalencia temporal. Trabajos posteriores confirman la convexidad inherente a la función cuota-monto del crédito, con implicaciones directas sobre la

sensibilidad del sistema financiero ante variaciones en tasas de interés (Hull, 2018).

2.2 Vulnerabilidad del ingreso y sobreendeudamiento

Estudios recientes en finanzas del hogar han documentado cómo los choques de ingreso afectan la capacidad de pago, especialmente en economías emergentes. Bogaert et al. (2023) muestran evidencia empírica de que reducciones proporcionales del ingreso generan un deterioro acelerado de la liquidez familiar. Adicionalmente, la literatura sobre sobreendeudamiento destaca la importancia de considerar dinámicas no lineales en consumo, gasto esencial y acumulación de deuda (Lusardi & Tufano, 2009; Brown et al., 2021; OECD, 2021).

2.3 Regulación financiera y riesgo crediticio minorista

El Comité de Basilea ha establecido lineamientos para la gestión del riesgo crediticio minorista, enfatizando el uso de métricas estandarizadas como la razón deuda-ingreso (DTI) para carteras de alto volumen (Basel Committee on Banking Supervision, 2019; European Banking Authority, 2020). Sin embargo, estudios regulatorios y de política pública señalan que estos criterios simplificados pueden subestimar la exposición real al riesgo cuando no se incorporan escenarios de estrés, inflación compuesta ni restricciones adicionales de liquidez (Krueger & Perri, 2006; Banco de la República, 2023).

2.4 Optimización matemática aplicada a finanzas domésticas

Se han desarrollado modelos basados en programación lineal, cuadrática y convexa para estimar decisiones óptimas en ahorro, consumo y endeudamiento. Ye y Luenberger (2016) presentan el marco teórico de optimización convexa que sustenta la formulación propuesta en este artículo. Otros autores han aplicado estos métodos para evaluar el flujo de caja familiar en contextos de incertidumbre y restricción de liquidez (Varian, 2010; Basu & Drew, 2019).

2.5 Modelos intertemporales bajo inflación y volatilidad

La literatura macroeconómica demuestra que la inflación compuesta afecta el ingreso real y el gasto esencial de forma multiplicativa, no lineal (Banco de la República, 2023). Además, modelos estocásticos intertemporales revelan que la incertidumbre inflacionaria genera riesgo adicional sobre las decisiones de endeudamiento, al modificar las trayectorias esperadas de ingresos y precios relativos (Clarida et al., 1999; Mishkin, 2007).

2.6 Brechas identificadas

A pesar de los avances mencionados, se observan tres vacíos en la literatura: (i) carencia de modelos matemáticos unificados que combinen inflación compuesta, convexidad de la cuota, choques de ingreso y restricciones de liqui-

dez; (ii) falta de estudios aplicados al contexto colombiano reciente, caracterizado por inflación elevada y volatilidad laboral; y (iii) ausencia de un marco operativo para comparar explícitamente criterios normativos (como el DTI) con la capacidad real sostenible estimada mediante optimización. El presente artículo contribuye a llenar estas brechas mediante un modelo formal, reproducible y aplicable a nivel microeconómico.

3. FUNDAMENTACIÓN MATEMÁTICA

3.1 Cálculo formal de la cuota de amortización

La amortización francesa exige que el valor presente de todas las cuotas sea igual al monto recibido M :

M = \sum_{k=1}^n \frac{C}{(1+i)^k} \quad (1)

- M : monto del crédito otorgado.
- C : cuota fija periódica a pagar.
- i : tasa de interés efectiva por periodo.
- n : número total de periodos de pago.
- k : periodo específico dentro del horizonte de pago.

Esta expresión corresponde al valor presente de una anualidad discreta. Utilizando la fórmula de la serie geométrica,

\sum_{k=1}^n r^k = r \frac{1-r^n}{1-r}, \quad r = (1+i)^{-1} \quad (2)

se obtiene

M = C \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad (3)

Despejando C , se llega a:

C(M) = M \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \quad (4)

Esta ecuación se fundamenta en la teoría clásica de anualidades discretas (Luenberger, 1998; Hull, 2018).

3.2 Inflación compuesta y efecto acumulativo

La inflación se modela como un proceso multiplicativo coherente con la construcción geométrica del Índice de Precios al Consumidor (IPC):

G(t) = G_0(1 + \pi)^t \quad (5)

donde G_0 es el gasto inicial, π la inflación periódica y t el número de periodos. Modelos lineales subestimarían el deterioro real del ingreso en horizontes largos (Banco de la República, 2023).



Fotografía: Yan Krukau (Bajo Licencia Pexels)

3.3 Choques negativos de ingreso

Un choque proporcional de ingreso se expresa como:

I' = I(1 - s) (6)

donde I es el ingreso base y s la proporción de choque (por ejemplo, desempleo parcial o reducción salarial). La evidencia empírica apoya esta formulación multiplicativa (Bogaert et al., 2023; Lusardi & Tufano, 2009).

3.4 Restricción de supervivencia financiera

Sea Gvital el gasto mínimo requerido. Si se impone

Gvital ≥ βI' (7)

y se cumple I' = C + Gvital, entonces

C ≤ I'(1 - β) (8)

- Gvital: gasto mínimo indispensable del hogar para garantizar niveles básicos de supervivencia.
- I: ingreso mensual base del hogar antes de choques.
- I': ingreso mensual ajustado después de un choque negativo.
- s: proporción del choque negativo de ingreso (0 < s < 1).

- β: proporción mínima del ingreso destinado a cubrir los gastos vitales.
- C: cuota mensual del crédito.

Esta condición asegura una liquidez mínima sin déficit estructural.

4. FORMULACIÓN DEL MODELO DE OPTIMIZACIÓN

El problema se formula como

max M (9)

sujeto a las siguientes restricciones.

4.1 Liquidez mensual

C(M) + Gf + Gv + A ≤ I (10)

donde Gf son los gastos fijos, Gv los gastos variables y A el ahorro mínimo.

4.2 Criterio normativo de carga financiera

C(M)/I ≤ α (11)

con α como umbral regulatorio o bancario de carga financiera.

4.3 Supervivencia bajo choque

C(M) ≤ I(1 - s)(1 - β) (12)

que limita la cuota máxima bajo un choque de ingreso de magnitud s.

4.4 Sostenibilidad bajo inflación

C(M) + [Gf + Gv](1 + π)^t + A ≤ I, t = 1, ..., T (13)

donde π es la inflación proyectada y T el horizonte de análisis (por ejemplo, 12 meses). El problema es convexo porque C(M) es convexa en M y las restricciones son lineales (Ye & Luenberger, 2016).

5. CASO DE ESTUDIO: HOGAR URBANO COLOMBIANO

Se considera un hogar representativo de estrato 3 en una ciudad colombiana intermedia. Los parámetros se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros del caso de estudio

Variable	Valor	Justificación
I	2,8 millones	Ingreso estrato 3 (DANE)
Gf	1,0 millones	Arriendo y servicios
Gv	0,5 millones	Alimentación y transporte
A	0,2 millones	Ahorro mínimo recomendado
π	10 %	IPC 2022-2023
s	10 %	Volatilidad laboral
i	1,5 %	Interés mensual de crédito de consumo
n	120	Plazo de 10 años

Fuente: elaboración propia con información del DANE y del Banco de la República.

La restricción de supervivencia bajo choque resulta ser la más restrictiva. Sustituyendo en

C(M) ≤ I(1 - s)(1 - β) (14)

con I = 2 800 000, s = 0,10 y β = 0,65, se obtiene:

I(1 - s) = 2 800 000 × 0,90 = 2 520 000 (15)

Cmáx = 2 520 000 × 0,35 = 882 000 (16)

Este valor constituye la cuota máxima mensual sostenible bajo el escenario adverso considerado. Sustituyendo Cmáx = 882 000 en la ecuación de amortización se obtiene el monto máximo del crédito:

M ≈ 48 800 000 (17)

Este monto es sensiblemente inferior al rango de 70 a 90 millones que habitualmente podrían ser aprobados por entidades financieras para un hogar con dicho ingreso, si solo se emplea un criterio de DTI.

6. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En esta sección se analiza cómo varía el monto máximo sostenible M ante cambios en la tasa de interés y en la inflación, manteniendo la estructura del modelo.

6.1 Variación de la tasa de interés

Para estudiar la sensibilidad respecto a la tasa de interés, se mantienen fijas la cuota máxima $C_{\max}$ y el plazo n , y se varía la tasa periódica i . La función

$$M(i) = \frac{C_{\max}[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n} \quad (18)$$

relaciona el monto sostenible con la tasa de interés. La Tabla 2 muestra algunos valores representativos, calculados a partir de tasas efectivas anuales convertidas a tasas mensuales equivalentes.

Tabla 2. Sensibilidad del monto sostenible a la tasa de interés

Tasa efectiva anual	Procedimiento	M (millones)
12 %	i mensual equivalente y $M(i)$	55,6
18 %	i mensual equivalente y $M(i)$	48,8
24 %	i mensual equivalente y $M(i)$	43,9
28 %	i mensual equivalente y $M(i)$	40,1

Fuente: elaboración propia.

6.2 Variación de la inflación

Para la inflación, el parámetro que se modifica es π en la restricción de sostenibilidad. Para cada escenario se calcula el gasto ajustado $G^f + G^v$ en el horizonte de análisis y se determina la cuota máxima compatible con el ingreso I . A partir de esa cuota se obtiene el nuevo valor de M mediante la ecuación de amortización. La Tabla 3 resume los resultados.

Tabla 3. Sensibilidad del monto sostenible a la inflación

Inflación	Procedimiento	M (millones)
6 %	Recalcular restricción y amortización	52,2
10 %	Recalcular restricción y amortización	48,8
14 %	Recalcular restricción y amortización	45,5

Fuente: elaboración propia.

Los resultados confirman que incrementos moderados de inflación reducen el monto sostenible, incluso cuando el ingreso nominal permanece constante.

7. DISCUSIÓN

Los resultados muestran que la solvencia financiera de los hogares depende de interacciones no lineales entre inflación, interés, gasto esencial y choques de ingreso. El modelo evidencia que los criterios bancarios tradicionales, basados en relaciones lineales, ignoran la convexidad de la cuota respecto al monto del crédito, el crecimiento exponencial de los gastos bajo inflación compuesta, la reducción proporcional del ingreso ante choques y la evolución dinámica del flujo de caja real.

La diferencia entre capacidad aprobada y capacidad real coincide con evidencia empírica reciente sobre vulnerabilidad financiera de los hogares (Bogaert et al., 2023; Brown et al., 2021; OECD, 2021). La combinación de tasas de interés elevadas, inflación persistente y choques laborales aumenta la probabilidad de sobreendeudamiento y morosidad, especialmente en hogares de ingresos medios y bajos.

En este sentido, los resultados obtenidos sugieren que la evaluación del riesgo crediticio podría beneficiarse de enfoques que incorporen de forma más explícita estas dinámicas económicas. Sin pretender reemplazar los criterios utilizados actualmente por el sistema financiero, el modelo propuesto permite ofrecer una lectura complementaria que aporta una comprensión más realista de la sostenibilidad del endeudamiento en el contexto analizado.

8. FUNDAMENTOS ECONÓMICOS Y REGULATORIOS DEL USO DE CRITERIOS SIMPLIFICADOS

La literatura en riesgo crediticio, regulación financiera y teoría de incentivos identifica razones estructurales para el uso generalizado de criterios simples por parte de las entidades financieras.

8.1 Regulación prudencial basada en umbrales

El Comité de Basilea establece que, para carteras minoristas masivas, pueden emplearse métricas simplificadas como la DTI o razones de

servicio de deuda (Basel Committee on Banking Supervision, 2019; European Banking Authority, 2020). La regulación prudencial no exige modelos microeconómicos complejos para cada hogar, sino el cumplimiento de límites agregados de riesgo.

8.2 Incentivos comerciales

El ingreso bancario depende del volumen de colocación; por tanto, modelos demasiado restrictivos reducen la cantidad de créditos aprobados. Esto genera un sesgo hacia criterios que maximizan la colocación más que la solvencia óptima del deudor (Krueger & Perri, 2006; OECD, 2021).

8.3 Costos operativos y computacionales

La aplicación de modelos individuales de optimización para miles de solicitudes diarias exige infraestructura analítica avanzada y costos operativos adicionales. Por ello, los bancos privilegian reglas simples de decisión, aun a costa de cierta pérdida de precisión (European Banking Authority, 2020; Basu & Drew, 2019).

8.4 Asimetría de información

Los sistemas crediticios suponen que el prestatario evalúa su propio bienestar financiero y acepta voluntariamente las condiciones del crédito. Esta presunción desplaza parte de la responsabilidad de la evaluación detallada hacia el deudor y refuerza el uso de criterios simplificados.

ficados por parte de las entidades (Lusardi & Tufano, 2009; OECD, 2021).

9. CONCLUSIONES

Se presentó un modelo matemático que integra de manera formal amortización discreta, inflación compuesta, choques de ingreso y restricciones de liquidez en un marco de optimización aplicado a hogares urbanos. El caso de estudio muestra que la capacidad sostenible de endeudamiento resulta significativamente menor que los montos que suelen aprobarse mediante criterios tradicionales de DTI, especialmente en contextos de inflación elevada y volatilidad laboral.

El análisis de sensibilidad evidencia que pequeñas variaciones en la tasa de interés o en la inflación tienen impactos sustantivos sobre el monto sostenible, poniendo de relieve la importancia de incorporar estos parámetros en la evaluación crediticia. El modelo ofrece un marco útil para formuladores de política, entidades financieras y programas de educación financiera, al proporcionar una herramienta cuantitativa explícita y reproducible.

Futuros trabajos pueden extender esta aproximación incorporando incertidumbre estocástica, simulaciones de escenarios, modelos dinámicos y técnicas de aprendizaje automático para la proyección de ingresos e inflación,

así como evaluaciones empíricas en diferentes segmentos de población.

10. REFERENCIAS

Banco de la República. (2023). *Metodología del Índice de Precios al Consumidor (IPC)*. Banco de la República.

Basel Committee on Banking Supervision. (2019). *Credit risk modelling practices and applications*. Bank for International Settlements.

Basu, S., & Drew, J. (2019). Consumption smoothing and household optimization models. *Economic Modelling*, 82, 234-248.

Bogaert, K., Almeida, R., & Zidar, E. (2023). Household finance under economic shocks. *Journal of Economic Perspectives*, 37(2), 89-116.

Brown, M., Grigsby, J., van der Klaauw, W., Wen, J., & Zafar, B. (2021). *The financial fragility of households: Evidence on savings and shocks* (NBER Working Paper n.º 28940). National Bureau of Economic Research.

Clarida, R., Galí, J., & Gertler, M. (1999). The science of monetary policy: A New Keynesian perspective. *Journal of Economic Literature*, 37(4), 1661-1707.

European Banking Authority. (2020). *Guidelines on loan origination and monitoring*. EBA.

Hull, J. C. (2018). *Options, futures, and other derivatives* (10.ª ed.). Pearson.

Krueger, D., & Perri, F. (2006). How do households respond to income shocks? *Review of Economic Studies*, 73(3), 687-708.

Luenberger, D. G. (1998). *Investment science*. Oxford University Press.

Lusardi, A., & Tufano, P. (2009). *Debt literacy, financial experiences, and overindebtedness* (NBER Working Paper n.º 14808). National Bureau of Economic Research.

Mishkin, F. S. (2007). *Monetary policy strategy*. MIT Press.

OECD. (2021). *Household debt and financial vulnerability*. OECD Publishing.

Varian, H. R. (2010). Microeconomic analysis of consumer optimization. *Journal of Economic Theory*, 145(1), 1-19.

Ye, Y., & Luenberger, D. G. (2016). *Linear and nonlinear programming* (4.ª ed.). Springer.